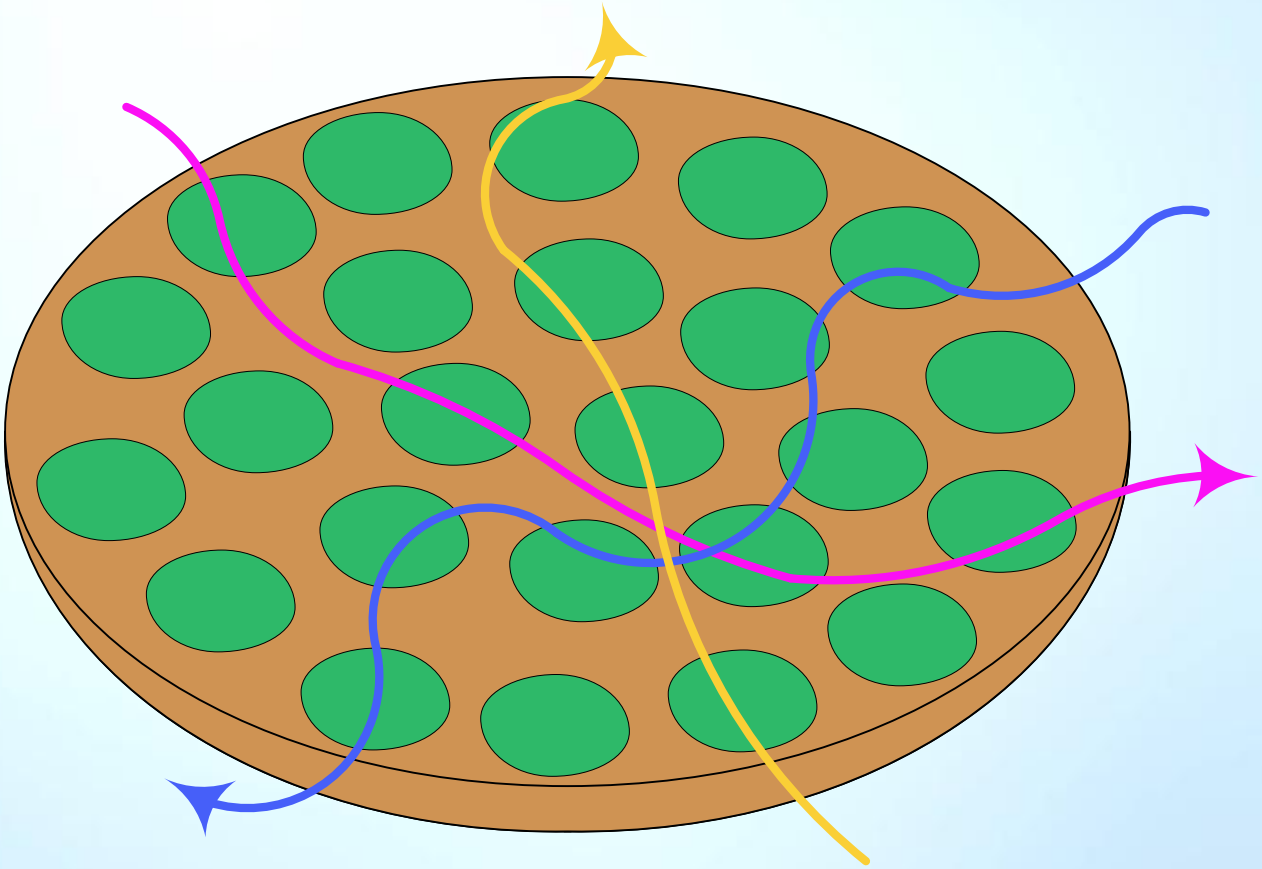
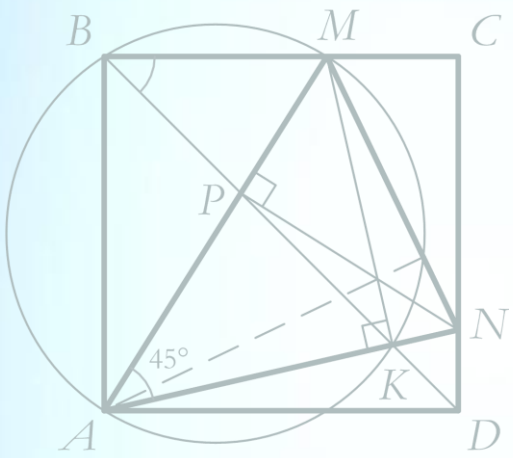
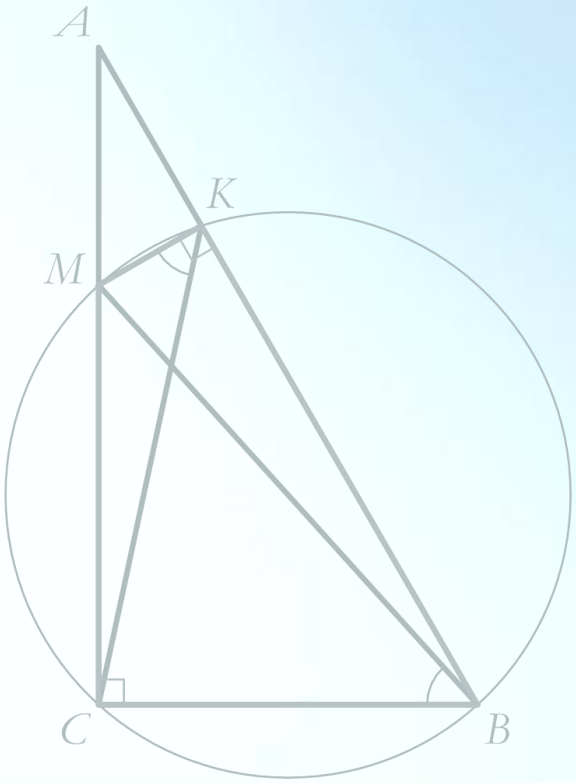
ИДЕИ

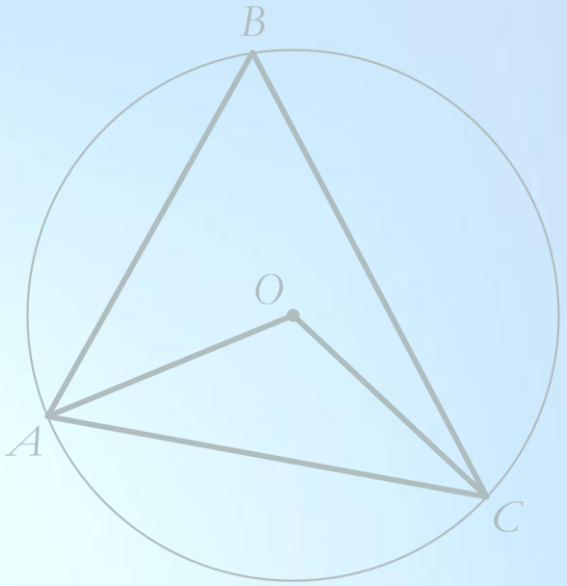
И

КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ









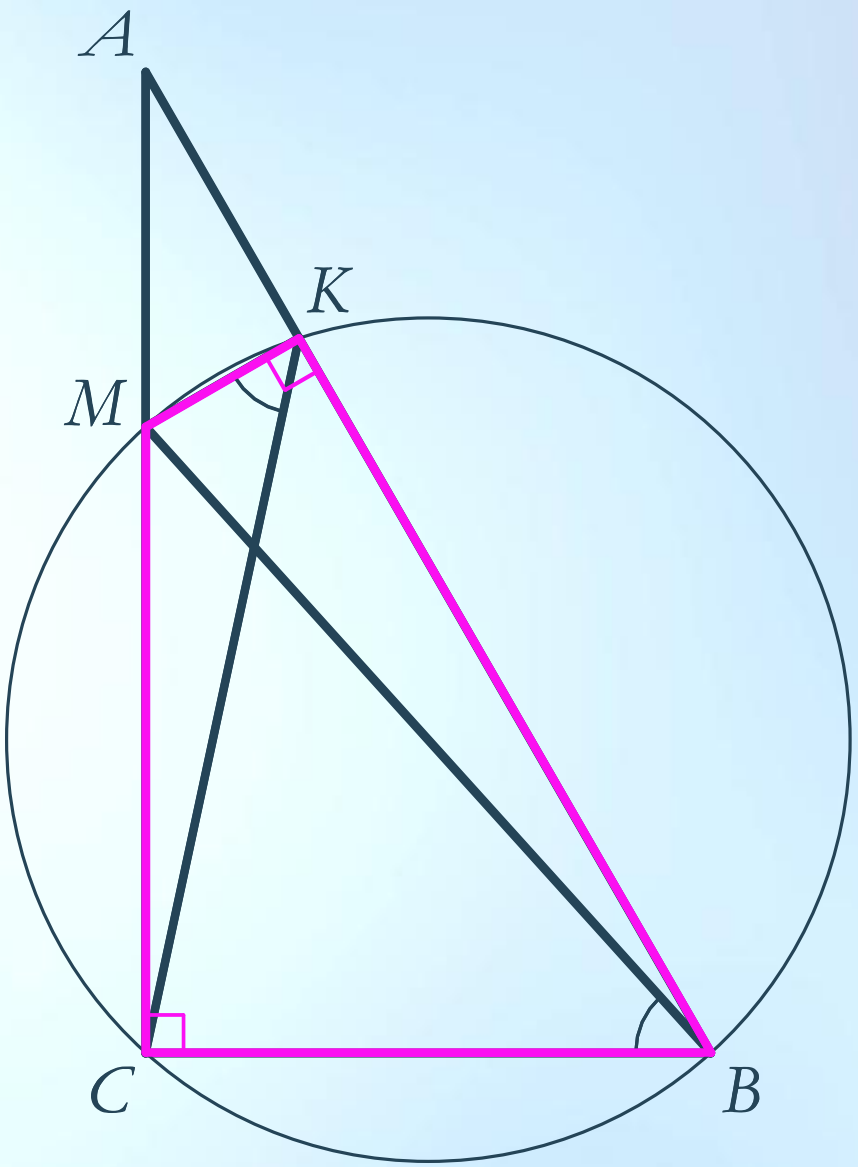
МЕТОД

вспомогательной окружности

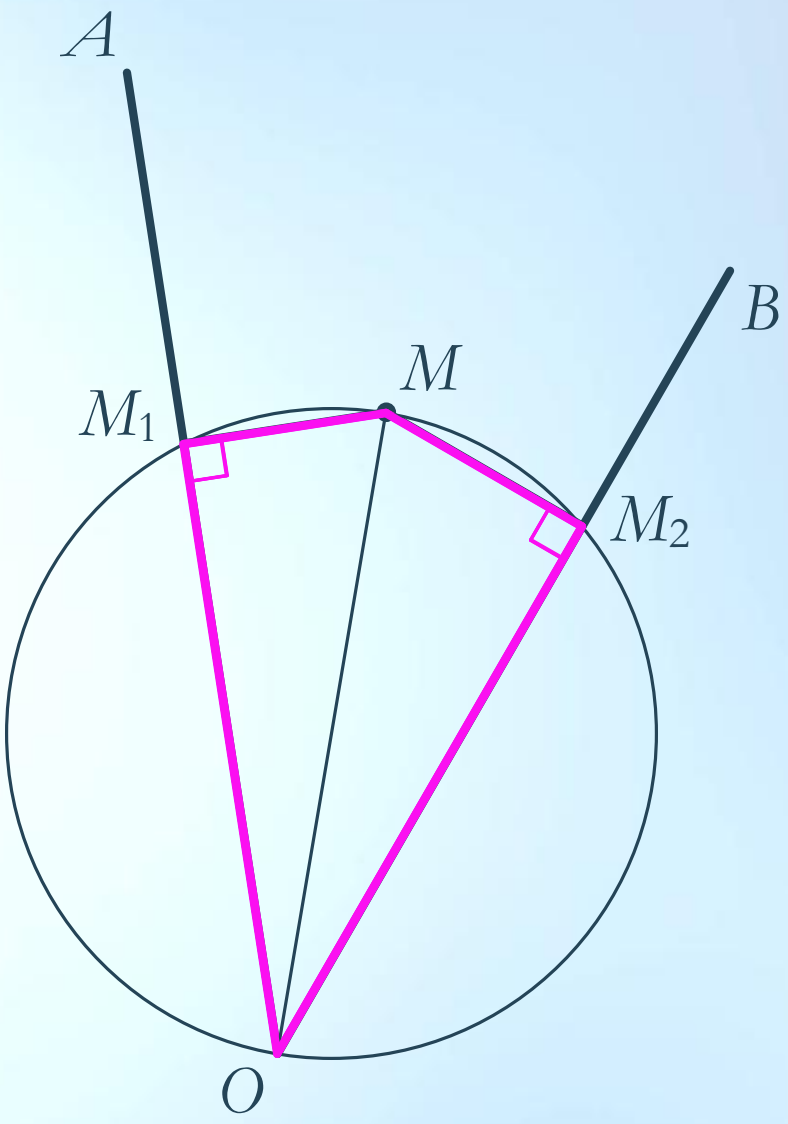
Ключевая идея 1

Обнаружить или построить четырехугольник, сумма противоположных углов которого равна 180°

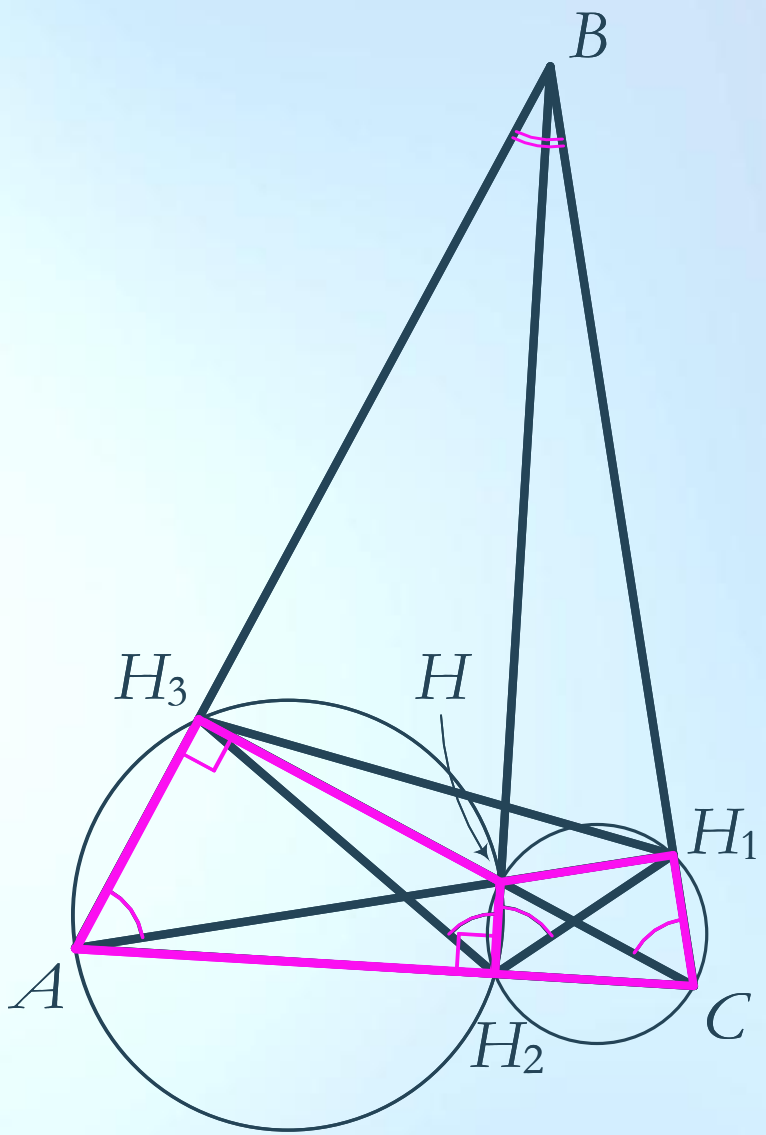
Задача 1. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.



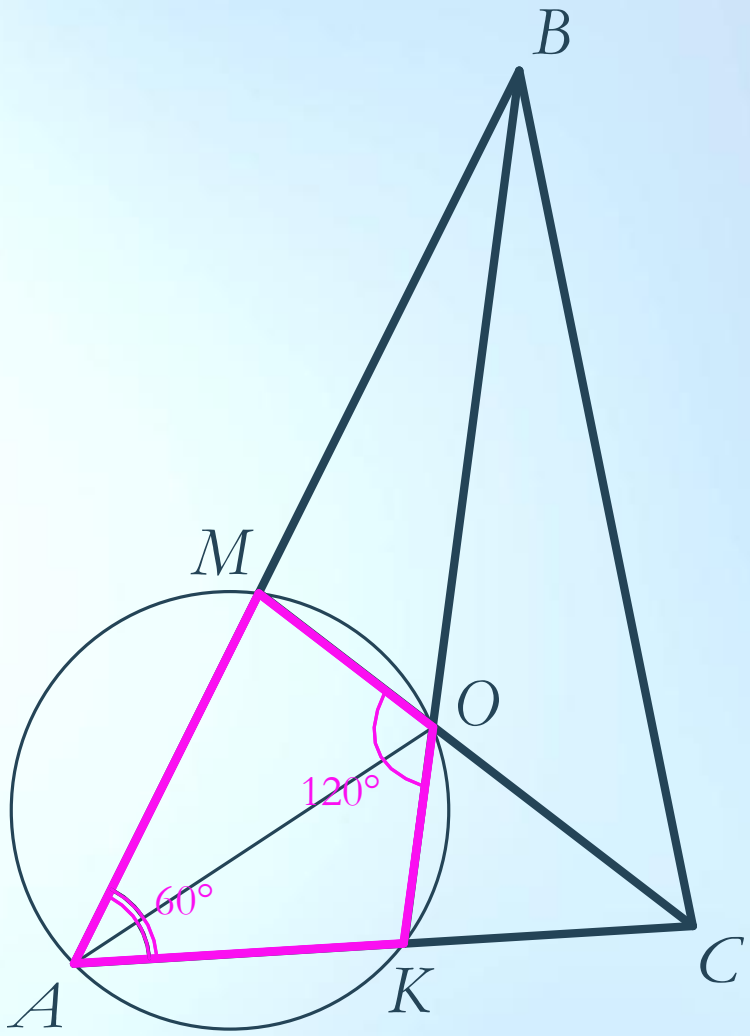
Задача 2. Из точки M, которая принадлежит углу AOB, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB. Докажите, что $M_1M_2 \le OM$.



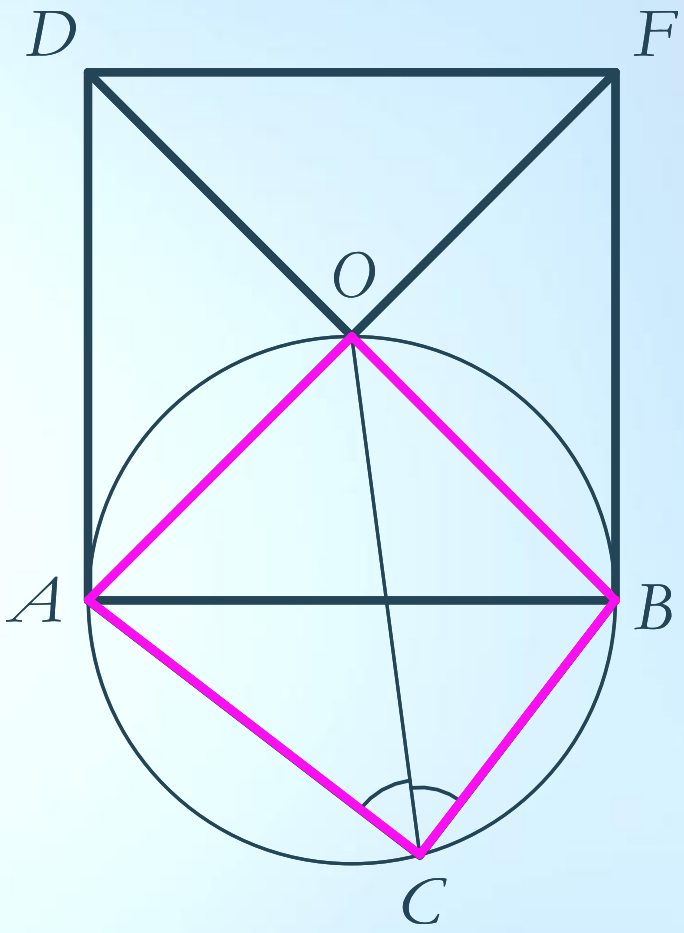
Задача 3. Докажите, что высоты AH_1, BH_2 и CH_3 остроугольного треугольника ABC делят пополам углы треугольника $H_1H_2H_3$.



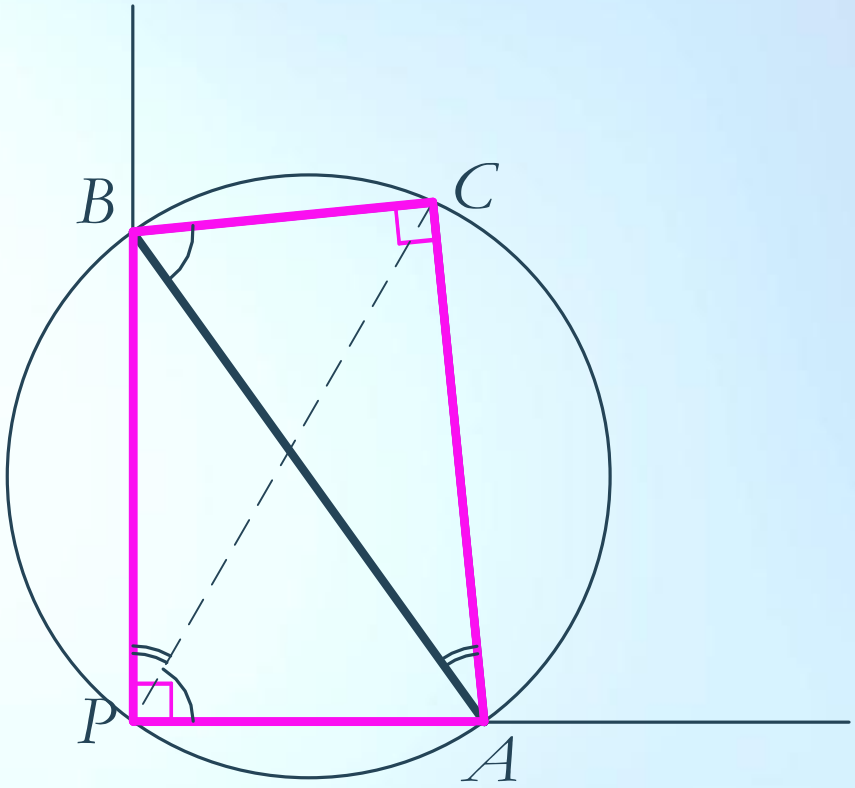
Задача 4. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$. Докажите, что $OK = OM$.



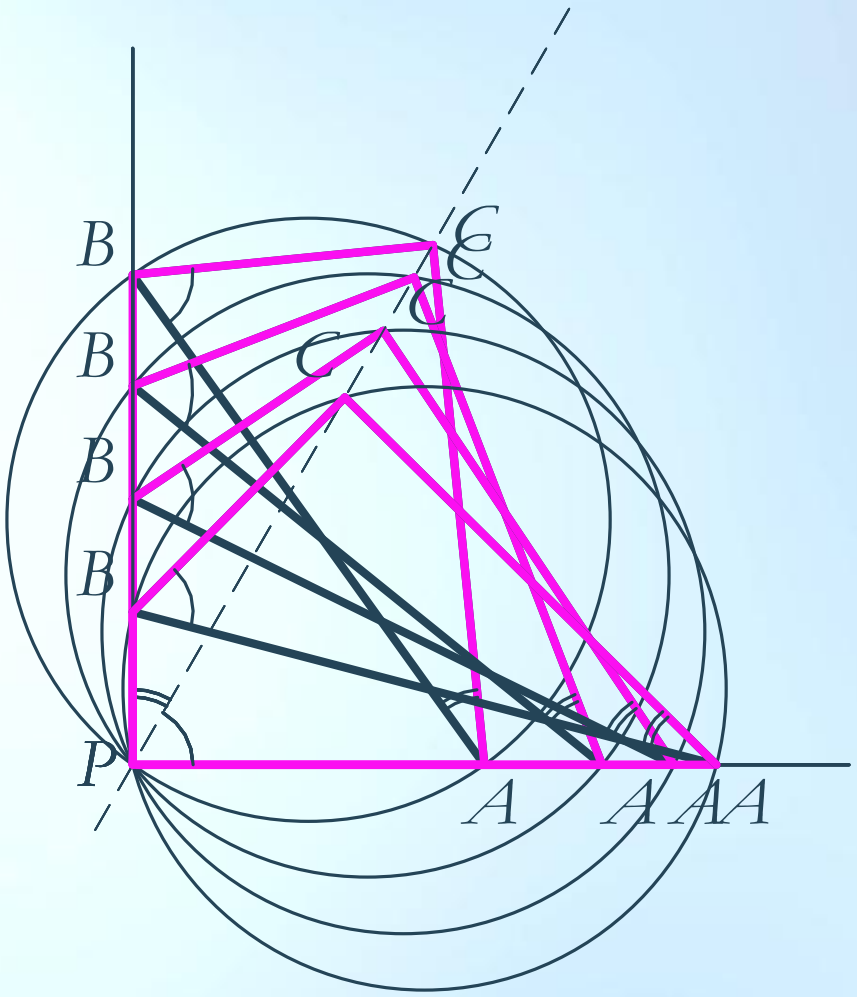
Задача 5. Вне прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузе AB построен квадрат $ABFD$. Докажите, что $\angle ACO = \angle OCB$, где O — точка пересечения диагоналей квадрата.



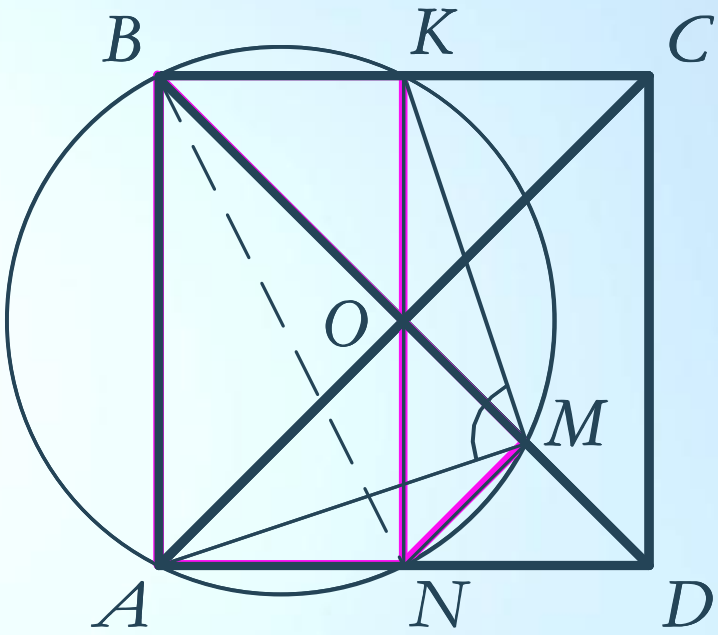
Задача 6. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.



Задача 6. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.



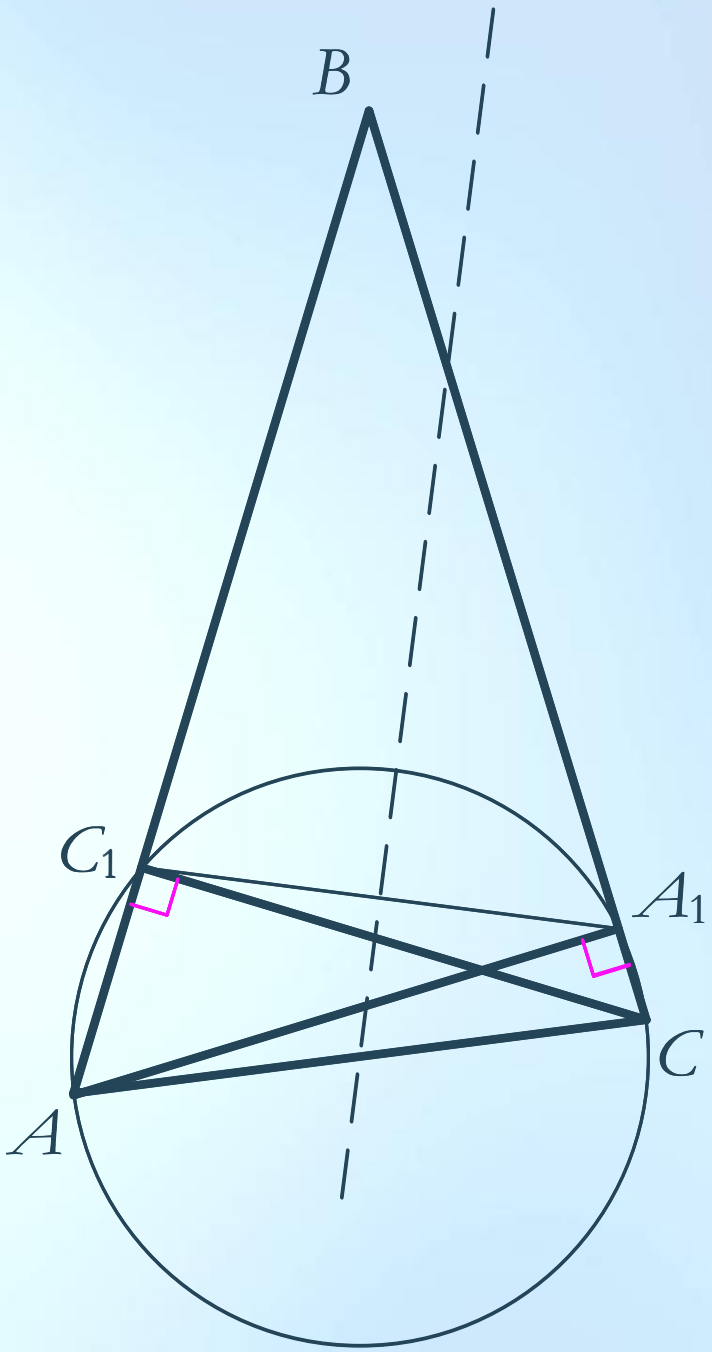
Задача 7. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки K и M — середины соответственно отрезков BC и OD. Найдите угол AMK.



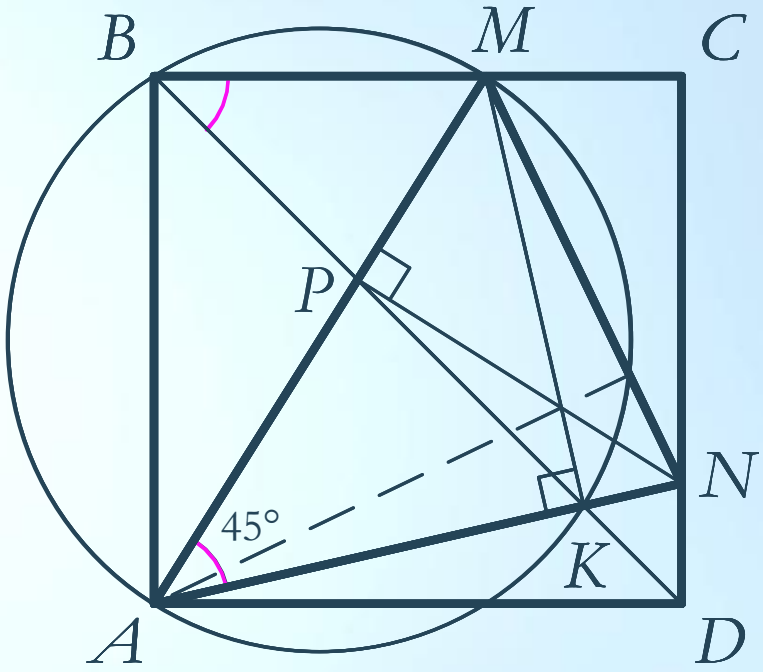
Ключевая идея 2

Обнаружить две точки, лежащие в одной полуплоскости от данной прямой, из которых данный отрезок, принадлежащий этой прямой, виден под одинаковыми углами

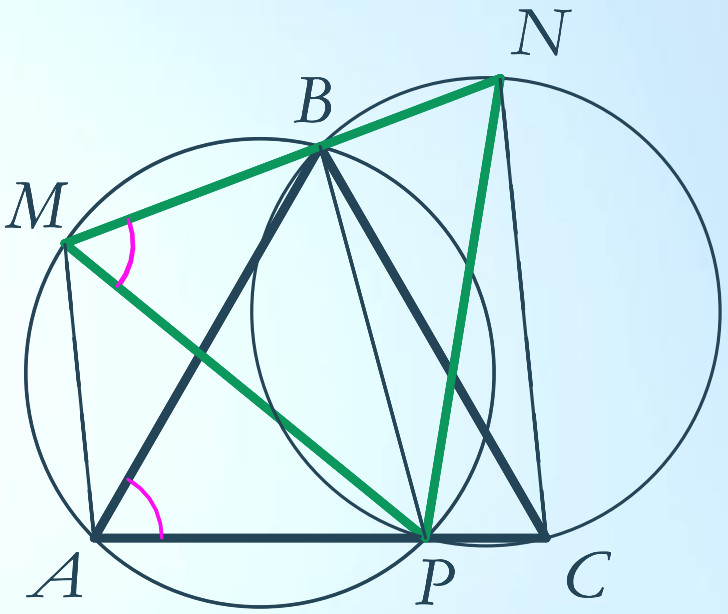
Задача 8. В остроугольном треугольнике ABC отрезки CC_1 и AA_1 — высоты. Докажите, что серединный перпендикуляр отрезка C_1A_1 проходит через середину стороны AC.



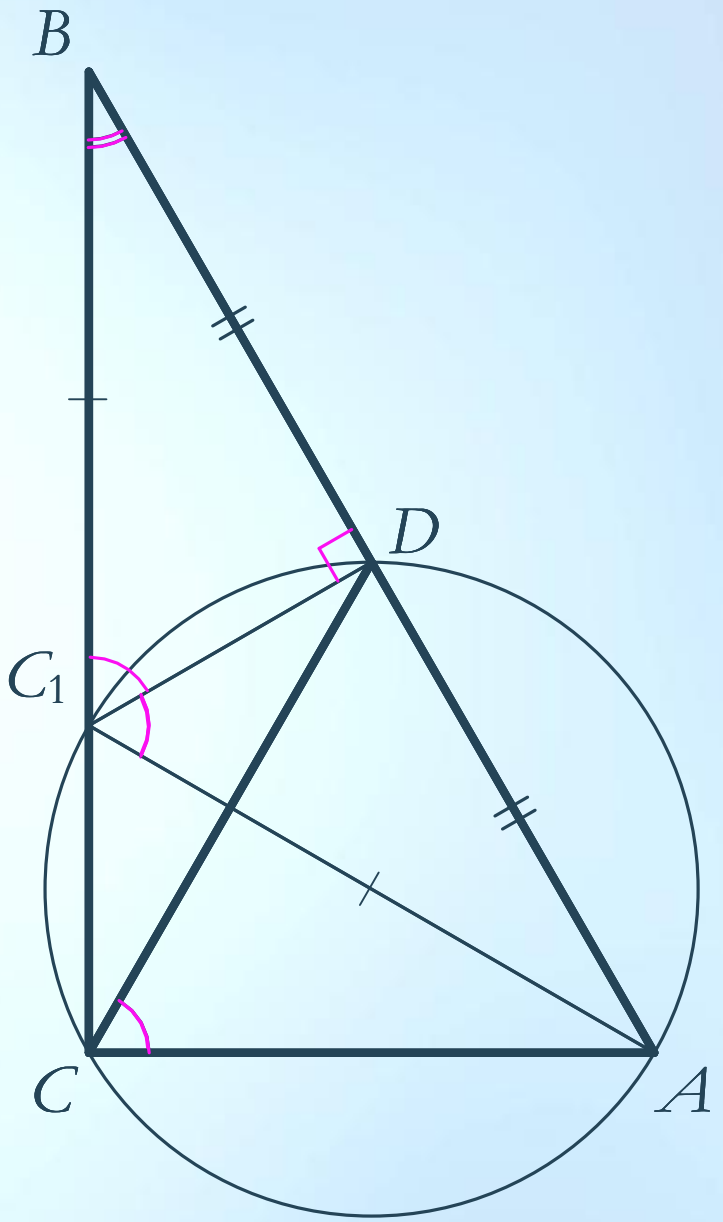
Задача 9. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $\angle MAN = 45°$. Пользуясь только линейкой, опустите перпендикуляр из точки A на прямую MN.



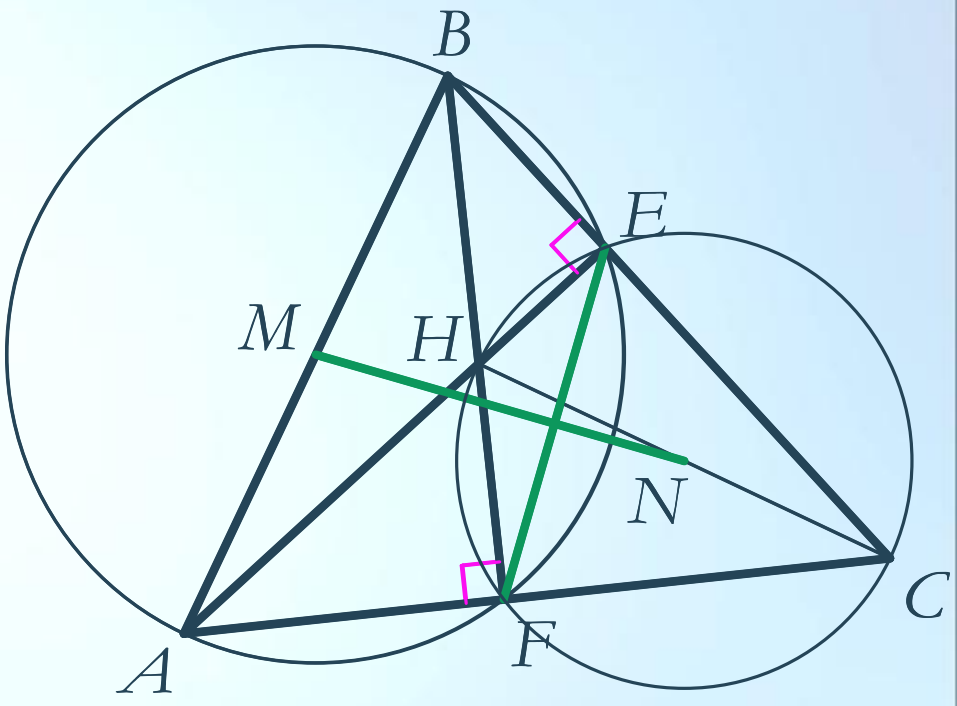
Задача 10. Равносторонние треугольники ABC и MNP расположены так, что вершина B лежит на стороне MN, а вершина P — на стороне AC. Докажите, что $AM \parallel NC$.



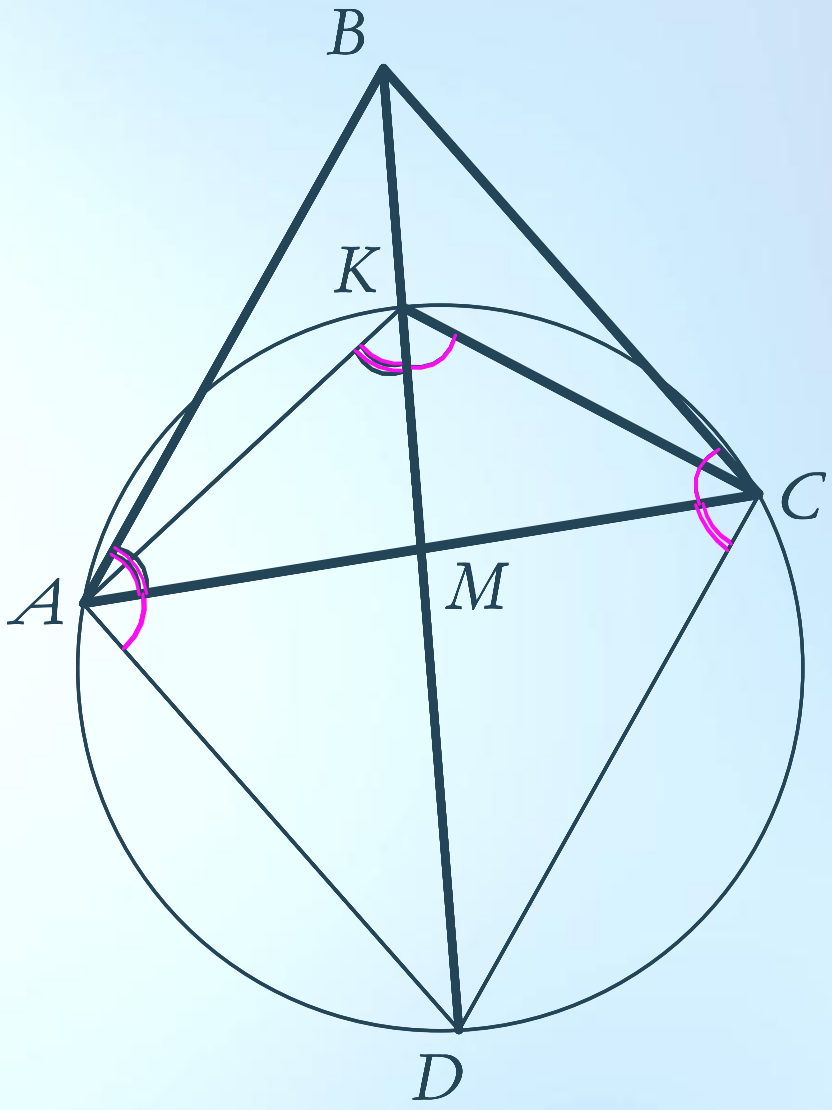
Задача 11. В треугольнике ABC $(AC < BC)$ проведена медиана CD. Известно, что $\angle DCA + \angle DBC = 90°$. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.



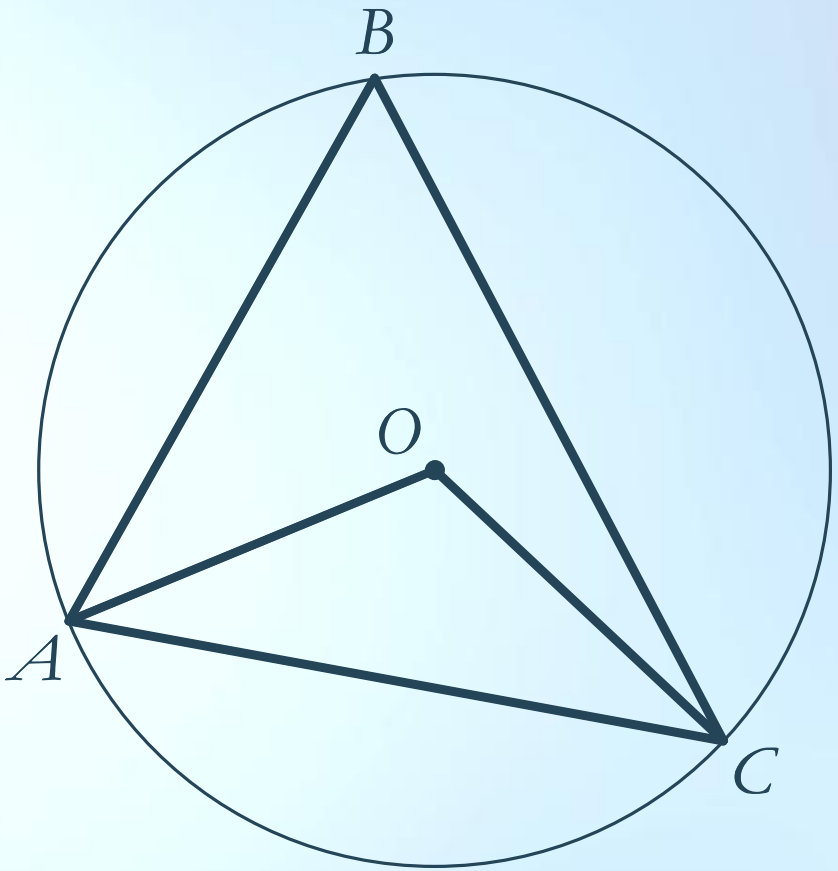
Задача 12. Высоты AE и BF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что $MN \perp FE$.



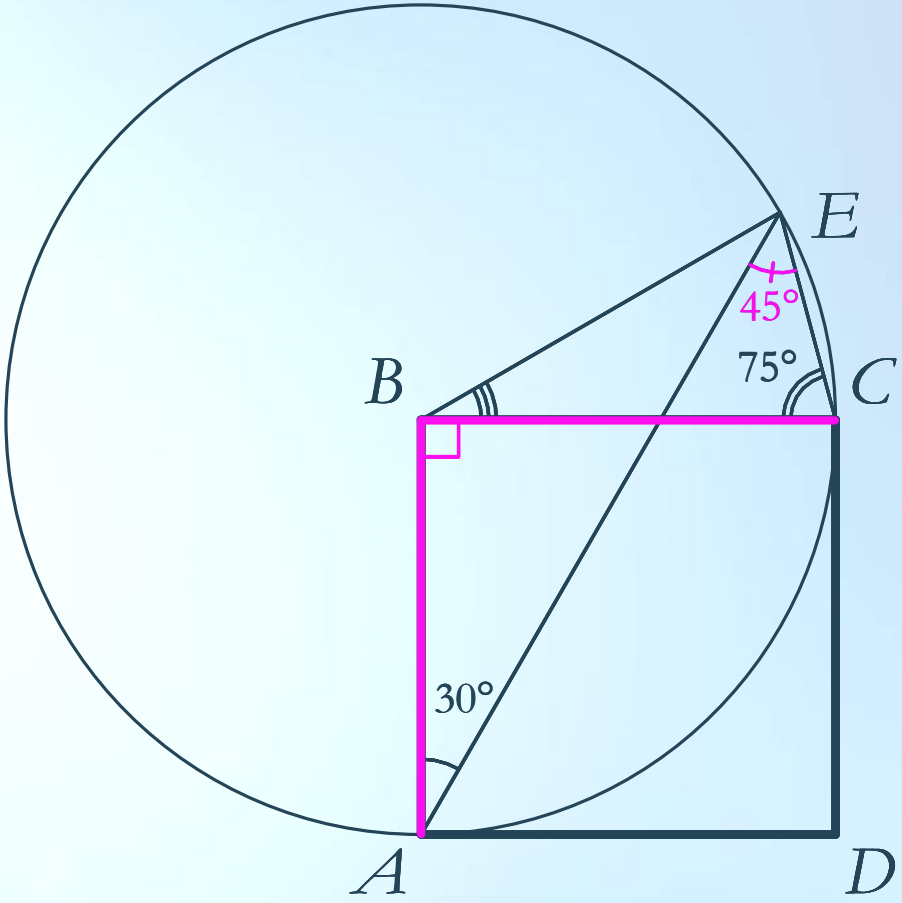
Задача 13. На медиане BM треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle MKC = \angle BCM$. Докажите, что $\angle AKM = \angle BAM$.



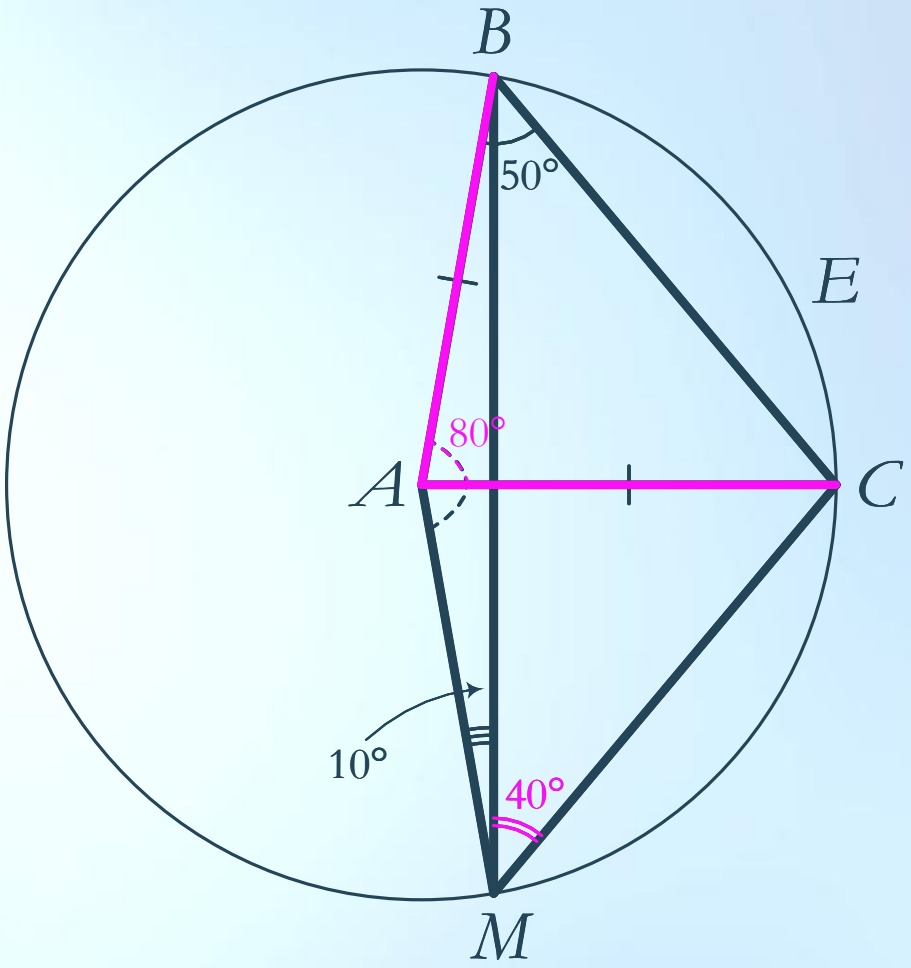
Ключевая задача 1. Точки O и B расположены в одной полуплоскости относительно прямой AC. Известно, что $OA = OC$ и $\angle AOC = 2\angle ABC$. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.



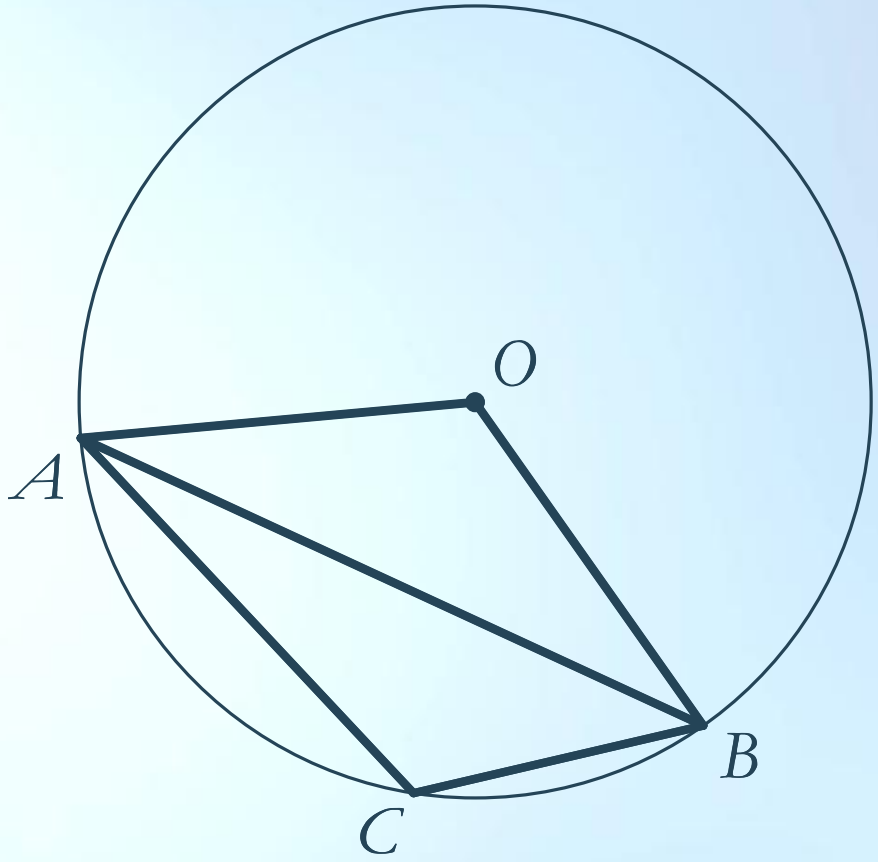
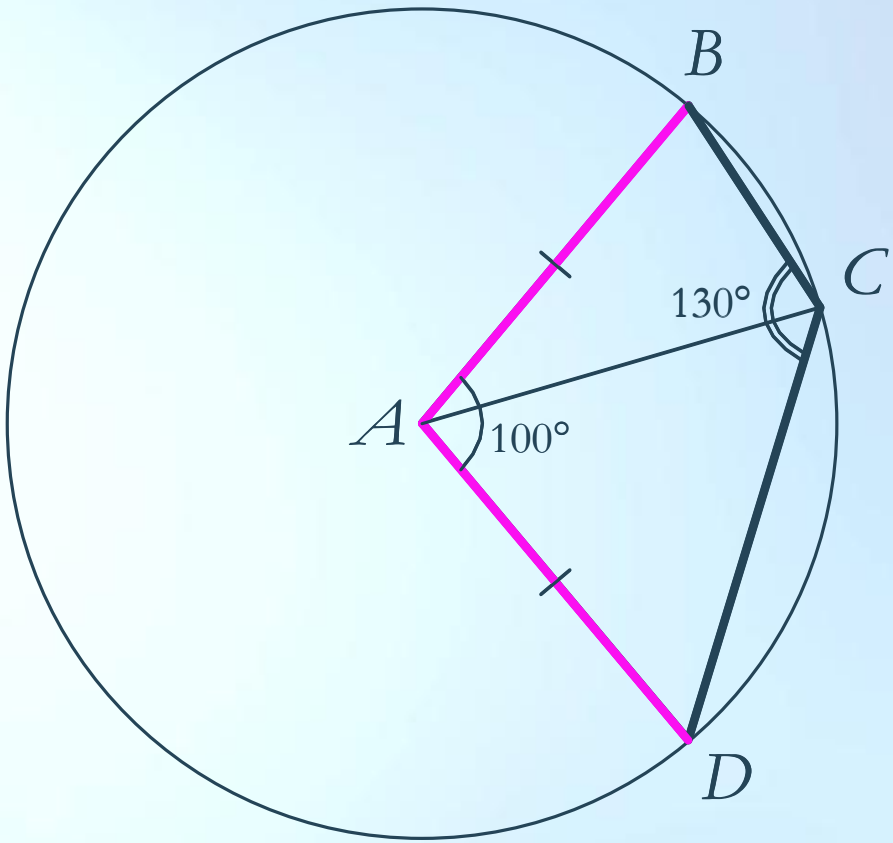
Задача 14. Дан квадрат $ABCD$. Вне квадрата отметили точку E так, что $\angle BAE = 30°$, $\angle BCE = 75°$. Найдите угол CBE.



Задача 15. Даны равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) и точка M, ему не принадлежащая, но принадлежащая углу ABC. Найдите угол BAM, если $\angle ABC = 50°$, $\angle BMC = 40°$, $\angle BMA = 10°$.



Ключевая задача 2. Точки O и C расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Известно, что $AO = OB$ и $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.



Задача 16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$, $AB = AD$. Докажите, что $AB = AC$.